

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI

Etapa locală-februarie 2013

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Barem Clasa XII

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Să se demonstreze că legea este asociativă pe \mathbb{R} .
- b) Să se determine simetricul elementului $x = \sqrt[3]{10}$ în raport cu legea dată.
- c) Să se arate că numerele $a = (2 * 2)^3$, $b = (2 * 2 * 2)^3$, $c = (2 * 2 * 2 * 2)^3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluție:

- a) Demonstrarea relației1p
- b) Elementul neutru este 1.....1p
Simetricul elementului $x = \sqrt[3]{10}$ este -21p
- c) $a=15$1p
 $b=22$1p
 $c=29$1p
 $b = \frac{a+c}{2}$1p

2. În mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale se consideră mulțimile $M = \{2^n | n \in \mathbb{Z}\}$ și $P = \{n^2 | n \in \mathbb{Z}\}$.

- a) Să se arate că operația de înmulțire a numerelor raționale determină pe mulțimea M o structură de grup comutativ.
- b) Să se demonstreze că produsul a patru elemente din mulțimea M care au exponenți naturali consecutivi este un element al mulțimii P .
- c) Să se arate că $M \cap P \neq \emptyset$.

Soluție:

- a) Demonstrarea axiomelor grupului.....4p
- b) $2^n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot 2^{n+3} = 2^{4n+6} = (2^{2n+3})^2 \in P$2p
- c) E suficient să se dea exemplu de un element comun celor două mulțimi, de exemplu : $16 = 2^4 = 4^2$1p

3. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (ax^2 + b) \cdot e^x$ și $g(x) = (x + 1)^2 \cdot e^x$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Să se determine a și b astfel încât f să fie o primitivă a funcției g .
- b) Știind că $b=0$, să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\int_0^1 f(x) dx = e - 2$.
- c) Considerând $a=1, b=0$, să se arate că $\int_1^2 \frac{g(x)}{f(x)} dx < 3$
(se poate folosi $\ln 2 < \frac{3}{4}$).

Soluție:

- a) f derivabilă și $f' = g$1p
 $a=1, b=1$1p
- b) $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 ax^2 \cdot e^x dx = a(e - 2)$2p
 $a=1$1p

$$c) \int_1^2 \frac{g(x)}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} dx = \frac{3}{2} + 2\ln 2 < 3. \dots\dots\dots 2p$$

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 2 + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$

- a) Să se demonstreze că funcția admite primitive pe \mathbb{R} .
b) Să se determine primitiva care se anulează în 0.

Soluție:

- a) Funcția f este continuă pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$ fiind elementară.....1p
Studiem continuitatea în 0: $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 2$1p
 f continuă pe \mathbb{R} , deci admite primitive pe \mathbb{R}1p

- b) Orice primitivă este de forma $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + C_1, & x < 0 \\ 2x - \cos x + C_2, & x \geq 0 \end{cases}$2p

Deoarece F este derivabilă este și continuă deci $F_s(0) = F_d(0)$ de unde se obține
că $C_1 = C_2 - 1$1p

Deci $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + C_1, & x < 0 \\ 2x - \cos x + C_1 + 1, & x \geq 0 \end{cases}, F(0)=0$, deci $C_1 = 0$1p